

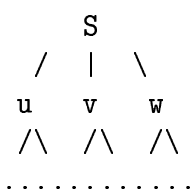
Лекция 12

Теория формальных языков (IV)

(Конспект: А. Крючков)

12.1 Контекстно-зависимые языки

Нас интересует, выводима ли строка x в контекстно-зависимой (неукорачивающей) грамматике G . Будем строить дерево: применим каждое из правил к стартовому символу; полученные строки — его сыновья.



Применим каждое из правил к каждому из сыновей (всеми возможными способами), и т. д. Так будем поступать только для строк, которые не длиннее x (остальные ветки не продолжаем); более того, если строка уже встречалась, соответствующую ветку (“дубликат”) продолжать не будем.

Рано или поздно либо мы выведем x , либо все ветки оборвутся (строк длины $\leq |x|$ — конечное число, а вывод в неукорачивающей грамматике обязательно использует только такие строки).

12.2 Рекурсивно-перечислимые языки

Машина Тьюринга (детерминированная):

$$(Q, \Sigma, >, _, q_s, q_y, q_n, \\ \delta : Q \times (\Sigma \cup \{>, _ \}) \rightarrow Q \times (\Sigma \cup \{>, _ \}) \times \{-1, 0, 1\},$$

где

$>$ — символ начала строки,

$_$ — пустой символ,

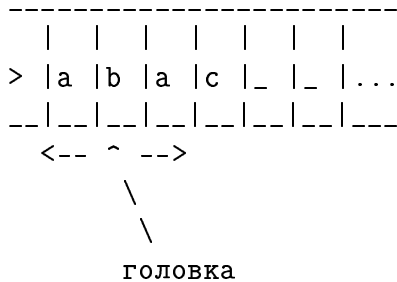
$q_s \in Q$ — начальное состояние,

$q_y, q_n \in Q$ — конечные состояния (принимающее и отвергающее),

Σ — алфавит,

Q — конечное множество состояний,

δ — функция перехода.



На каждом шаге мы меняем символ, на который указывает головка, в соответствии с функцией δ , а затем сдвигаем головку на -1 , 0 или 1 позицию вправо.

Определение 12.1. $q \xrightarrow{a/b,+} p \Leftrightarrow (p, b, +1) = \delta(q, a)$ (заменяем a на b и идем вправо). Аналогично с -1 и 0 .

Попав в конечное состояние, машина обязательно останавливается. Если на входе x мы попадаем в q_y , обозначим это $M(x) = 1$; если в q_n , то $M(x) = 0$; никуда (работаем бесконечно долго) — $M(x) = +\infty$.

Теорема 12.1. По любой машине Тьюринга M можно построить РАМ-машину M' , такую, что $\forall x M(x) = M'(x)$, а время работы машины M' ограничено полиномом от времени работы M (коэффициенты этого полинома зависят только от M , но не от входа). И наоборот.

Задача 12.1. Доказать теорему 12.1.

Теорема 12.2. Пусть $L \subseteq \Sigma^*$. Тогда существует грамматика (с произвольными правилами) G , порождающая L , тогда и только тогда, когда существует ДМТ M , такая, что для любого $x \in L$ выполняется $M(x) = 1$, а для любого $x \notin L$ выполняется $M(x) \neq 1$.

Доказательство. \Rightarrow Ведем себя аналогично тому, как решали задачу принадлежности в разделе 12.1, только не обрываем никаких ветвей (которые можно продолжить). Найдем строку — хорошо ($M(x) = 1$); нет — не заканчиваем работу ($M(x) = +\infty$).

\Leftarrow Строим грамматику. Подготовим начальную конфигурацию машины Тьюринга:

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow S'Z; \\ Z &\longrightarrow _Z; \\ Z &\longrightarrow E'; \\ S' &\longrightarrow aS'a \ (\forall a \in \Sigma); \\ S' &\longrightarrow E>q_s. \end{aligned}$$

Так мы выведем строку “перевернутый вход $E > q_s$ вход $_ \dots _ E'$ ”.

Также нетерминалами будут состояния машины Тьюринга. Моделируем работу машины Тьюринга следующим образом:

$$\begin{aligned} aq &\longrightarrow bp, \text{ если } q \xrightarrow{a/b,0} p; \\ aq &\longrightarrow pb, \text{ если } q \xrightarrow{a/b,-} p; \\ aq &\longrightarrow q' \text{ и } q'c \longrightarrow cp, \text{ если } q \xrightarrow{a/b,+} p; \end{aligned}$$

Остается в конце работы убрать оставшееся на ленте (а вместе с символами E и E' — и состояние q_y):

$$\begin{aligned} q_y c &\longrightarrow q_y \ (\forall c \in \Sigma \cup \{ _, > \}); \\ cq_y &\longrightarrow q_y \ (\forall c \in \Sigma \cup \{ _, > \}); \\ Eq_y E' &\longrightarrow \epsilon. \end{aligned}$$

□

Определение 12.2. Язык $L \subseteq \Sigma^*$ — *рекурсивно-перечислимый*, если существует машина Тьюринга M , такая, что $\forall x \in \Sigma^* (x \in L \Leftrightarrow M(x) = 1)$.

Определение 12.3. Язык $L \subseteq \Sigma^*$ — *рекурсивный*, если существует машина Тьюринга M , такая, что $\forall x \in \Sigma^* ((x \in L \Leftrightarrow M(x) = 1) \wedge (x \notin L \Leftrightarrow M(x) = 0))$.

Заметим, что рекурсивные языки — в точности те, для которых проблема принадлежности разрешима.

Теорема 12.3. *Существует язык, являющийся рекурсивно-перечислимым, но не рекурсивным.*

Лемма 12.1. *Существует универсальная машина Тьюринга U : на вход U подается описание машины T и вход, а выдает она то, что выдала бы машина T на данном входе.*

Задача 12.2. Доказать лемму 12.1.

Доказательство теоремы. Определим язык L так: $(M, x) \in L \Leftrightarrow M(x) = 1$. Он, очевидно, рекурсивно-перечислимый. Покажем, что он не рекурсивный.

Пусть он все же рекурсивный. Тогда существует машина A , такая, что

$$A((M, x)) = 1 \Leftrightarrow M(x) = 1,$$

$$A((M, x)) = 0 \Leftrightarrow M(x) \neq 1.$$

Построим еще одну машину, D , на вход которой подается описание машины R :

$$D(R) = 0, \text{ если } A((R, R)) = 1;$$

$$D(R) = 1, \text{ если } A((R, R)) = 0$$

(чтобы построить ее, воспользуемся леммой 12.1: применим U к A с входом (R, R)).

Чему равно $D(D)$? Если $D(D) = 1$, то $A((D, D)) = 0$, т.е. $D(D) \neq 1$ (противоречие). Если же $D(D) = 0$, то $A((D, D)) = 1$, т.е. $D(D) = 1$ (противоречие). По построению не может быть и $D(D) = +\infty$, т.е. машины D (а вместе с ней — и машины A) не существует. \square