Лекция 12

Теория формальных языков (IV)

(Конспект: А. Крючков)

12.1 Контекстно-зависимые языки

Нас интересует, выводима ли строка x в контекстно-зависимой (неукорачивающей) грамматике G. Будем строить дерево: применим каждое из правил к стартовому символу; полученные строки — его сыновья.

```
     S
  /  |  \
 u   v   w
 /\  /\  /\
............
```

Применим каждое из правил к каждому из сыновей (всеми возможными способами), и т. д. Так будем поступать только для строк, которые не длиннее x (остальные ветки не продолжаем); более того, если строка уже встречалась, соответствующую ветку ("дубликат") продолжать не будем.

Рано или поздно либо мы выведем x, либо все ветки оборвутся (строк длины $\leqslant |x|$ — конечное число, а вывод в неукорачивающей грамматике обязательно использует только такие строки).

12.2 Рекурсивно-перечислимые языки

Машина Тьюринга (детерминированная):

$$(Q, \Sigma, >, \_, q_s, q_y, q_n,\\ \delta : Q \times (\Sigma \cup \{>, \_\}) \to Q \times (\Sigma \cup \{>, \_\}) \times \{-1, 0, 1\},$$

где

$>$ — символ начала строки,

$\_$ — пустой символ,

$q_s \in Q$ — начальное состояние,

$q_y, q_n \in Q$ — конечные состояния (принимающее и отвергающее),

Σ — алфавит,

Q — конечное множество состояний,

δ — функция перехода.

```
------------------------
  |  |  |  |  |  |  |
> |a |b |a |c |_ |_ |...
__|__|__|__|__|__|__|___
  <-- ^ -->
       \
        \
       головка
```

На каждом шаге мы меняем символ, на который указывает головка, в соответствии с функцией δ, а затем сдвигаем головку на -1, 0 или 1 позицию вправо.

Определение 12.1. $q \xrightarrow{a/b,+} p \Leftrightarrow (p, b, +1) = \delta(q, a)$ (заменяем a на b и идем вправо). Аналогично с -1 и 0.

Попав в конечное состояние, машина обязательно останавливается. Если на входе x мы попадаем в q_y, обозначим это $M(x) = 1$; если в q_n, то $M(x) = 0$; никуда (работаем бесконечно долго) — $M(x) = +\infty$.

Теорема 12.1. *По любой машине Тьюринга M можно построить RAM-машину M', такую, что $\forall x\ M(x) = M'(x)$, а время работы машины M' ограничено полиномом от времени работы M (коэффициенты этого полином зависят только от M, но не от входа). И наоборот.*

Задача 12.1. Доказать теорему 12.1.

Теорема 12.2. *Пусть $L \subseteq \Sigma^*$. Тогда существует грамматика (с произвольными правилами) G, порождающая L, тогда и только тогда, когда существует ДМТ M, такая, что для любого $x \in L$ выполняется $M(x) = 1$, а для любого $x \notin L$ выполняется $M(x) \neq 1$.*

Доказательство. $\boxed{\Rightarrow}$ Ведем себя аналогично тому, как решали задачу принадлежности в разделе 12.1, только не обрываем никаких ветвей (которые можно продолжить). Найдем строку — хорошо ($M(x) = 1$); нет — не заканчиваем работу ($M(x) = +\infty$).

$\boxed{\Leftarrow}$ Строим грамматику. Подготовим начальную конфигурацию машины Тьюринга:

$S \longrightarrow S'Z$;
$Z \longrightarrow \_Z$;
$Z \longrightarrow E'$;
$S' \longrightarrow aS'a$ ($\forall a \in \Sigma$);
$S' \longrightarrow E{>}q_s$.

Так мы выведем строку “перевернутый вход $E > q_s$ вход $\_ \ldots \_\ E'$”.

Также нетерминалами будут состояния машины Тьюринга. Моделируем работу машины Тьюринга следующим образом:

$aq \longrightarrow bp$, если $q \xrightarrow{a/b,0} p$;
$aq \longrightarrow pb$, если $q \xrightarrow{a/b,-} p$;
$aq \longrightarrow q'$ и $q'c \longrightarrow cp$, если $q \xrightarrow{a/b,+} p$;

Остается в конце работы убрать оставшееся на ленте (а вместе с символами E и E' — и состояние q_y):

$q_y c \longrightarrow q_y$ ($\forall c \in \Sigma \cup \{\_, >\}$);
$cq_y \longrightarrow q_y$ ($\forall c \in \Sigma \cup \{\_, >\}$);
$Eq_yE' \longrightarrow \epsilon$. $\square$

Определение 12.2. Язык $L \subseteq \Sigma^*$ — *рекурсивно-перечислимый*, если существует машина Тьюринга M, такая, что $\forall x \in \Sigma^*$ $(x \in L \Leftrightarrow M(x) = 1)$.

Определение 12.3. Язык $L \subseteq \Sigma^*$ — *рекурсивный*, если существует машина Тьюринга M, такая, что $\forall x \in \Sigma^*$ $((x \in L \Leftrightarrow M(x) = 1) \wedge (x \notin L \Leftrightarrow M(x) = 0))$.

Заметим, что рекурсивные языки — в точности те, для которых проблема принадлежности разрешима.

Теорема 12.3. *Существует язык, являющийся рекурсивно-перечислимым, но не рекурсивным.*

Лемма 12.1. *Существует* универсальная машина Тьюринга U*: на вход* U *подается описание машины* T *и вход, а выдает она то, что выдала бы машина* T *на данном входе.*

Задача 12.2. Доказать лемму 12.1.

Доказательство теоремы. Определим язык L так: $(M, x) \in L \Leftrightarrow M(x) = 1$. Он, очевидно, рекурсивно-перечислимый. Покажем, что он не рекурсивный.

Пусть он все же рекурсивный. Тогда существует машина A, такая, что
$A((M, x)) = 1 \Leftrightarrow M(x) = 1$,
$A((M, x)) = 0 \Leftrightarrow M(x) \neq 1$.

Построим еще одну машину, D, на вход которой подается описание машины R:
$D(R) = 0$, если $A((R, R)) = 1$;
$D(R) = 1$, если $A((R, R)) = 0$
(чтобы построить ее, воспользуемся леммой 12.1: применим U к A с входом (R, R)).

Чему равно $D(D)$? Если $D(D) = 1$, то $A((D, D)) = 0$, т.е. $D(D) \neq 1$ (противоречие). Если же $D(D) = 0$, то $A((D, D)) = 1$, т.е. $D(D) = 1$ (противоречие). По построению не может быть и $D(D) = +\infty$, т.е. машины D (а вместе с ней — и машины A) не существует. $\square$