Лекция 3

Параллельный алгоритм для задачи о минимальном совершенном паросочетании

(Конспект: Д. Ицыксон)

3.1 Постановка задачи

Дан взвешенный неориентированный граф $G = (V, E, w)$ с четным числом вершин. Требуется разбить все вершины на пары, соединенные ребром, так чтобы сумма весов ребер была минимальна. Мы предполагаем, что хотя бы одно такое («совершенное») паросочетание имеется.

Мы приведем параллельный алгоритм для этой задачи, использующий $\mathrm{poly}(n)$ процессоров и работающий время $O(\log n)$, где n — число вершин графа.

Мы воспользуемся следующим фактом, доказанным в другой лекции.

Факт 3.1. *Определитель матрицы и обратную матрицу можно вычислить за $O(\log n)$ на $\mathrm{poly}(n)$ процессорах.*

3.2 Матрица Татта (Tutte matrix)

Сопоставим графу следующую символьную матрицу A:

$$a_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, & \text{если } i < j,\ \{i,j\} \in E \\ -x_{ij}, & \text{если } i > j,\ \{i,j\} \in E \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Теорема 3.1. *В графе имеется совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда определитель матрицы Татта отличен от нуля.*

Далее в этом разделе предполагается, что минимальное паросочетание только одно (как это обеспечить, будет показано в следующем разделе).

Лемма 3.1. *Положим $B = A[x_{ij} := 2^{w_{ij}}]$. Если в графе минимальное совершенное паросочетание единственно и имеет вес W, то $\det B$ делится на 2^{2W} и не делится на 2^{2W+1}.*

Доказательство.

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) B_\sigma$$

$$B_\sigma = \prod_{i=1}^{n} B_{i,\sigma(i)}$$

Посмотрим на ненулевые B_σ. Они соответствуют набору направленных ребер нашего графа $(i, \sigma(i))$, более того, набору циклов. Какой же вклад в $\det B$ вносит набор циклов, соответствующий перестановке σ? Имеется 3 случая.

1. Все циклы состоят из двух вершин. Такая перестановка соответствует совершенному паросочетанию. Если это минимальное паросочетание, то $|B_\sigma| = 2^{2W}$, иначе, как минимум, 2^{2W+2} (по единственности минимального паросочетания).

2. Все циклы четной длины. Такой перестановке можно сопоставить 2 паросочетания: по четным ребрам и по нечетным. Из них минимальным может быть только одно. Следовательно, $|B_\sigma|$ делится на 2^{2W+1}.

3. Есть циклы нечетной длины. Упорядочим в графе все циклы нечетной длины (с учетом направления обхода), так чтобы цикл и обратный ему шли подряд. Возьмем наименьший цикл нечетной длины и развернем его. Получим перестановку σ'. Очевидно, что $sgn(\sigma) = sgn(\sigma')$. Знаки весов в этом цикле для σ' будут противоположными по знаку. Таким образом, $B_\sigma + B_{\sigma'} = 0$, т.е. эти две перестановки вносят нулевой суммарный вклад в $\det B$.

$\square$

Лемма 3.2. *Пусть $B = A[x_{ij} := 2^{w_{ij}}]$, минимальное совершенное паросочетание единственно и имеет вес W. Тогда ребро (i, j) принадлежит паросочетанию тогда и только тогда, когда $\frac{B^{(i,j)} 2^{w_{ij}}}{2^{2W}}$ нечетно, где $B^{(i,j)}$ — это алгебраическое дополнение элемента (i, j).*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы. Изменятся только разбор последнего случая: разворачивать будем наименьший нечетный цикл, *не содержащий ребра* (i, j); такой есть, так как число вершин четно. □

Теперь достаточно лишь посчитать матрицу $\det B \times B^{-1}$ и выделить элементы, у которых меньше всего нулей на конце в двоичной системе счисления.

Замечание 3.1. Время работы алгоритма зависит не только от размера графа, но и от весов. Так что веса должны быть не очень большими (заметим, что мы берем от них экспоненту).

Далее попытаемся избавиться от предположения единственности минимального паросочетания.

3.3 Isolating Lemma

Лемма 3.3. *Пусть* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $\Gamma = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$, $\forall i$, $S_i \subseteq X$. *Выберем* $u_i = \mathrm{random}(1\,..\,2m)$ *— вес элемента* x_i. *Тогда* $\Pr\{\exists! i :$ *вес* S_i *минимальный*$\} \geq \frac{1}{2}$.

Доказательство. Не умаляя общности, считаем, что нет элементов, появляющихся во всех множествах (или ни в одном). Рассмотрим событие A_i, соответствующее тому, что вес минимального подмножества, среди множеств, не содержащих элемент x_i, равняется весу минимального подмножества, среди множеств, содержащих элемент x_i. Вероятность A_i не более $\frac{1}{2m}$, так как лишь одно значение u_i, при фиксированных остальных весах сможет вызвать событие A_i.

Итого с вероятностью не менее $\frac{1}{2}$ событие A_i не случится ни для одного i, а тогда существует только одно множество минимального веса. □

При помощи этой леммы разберемся с ситуацией, когда в графе более одного минимального совершенного паросочетания. Введем новые веса (нам уже были даны какие-то):

$$u_{ij} = w_{ij} \cdot 2mn + \mathrm{random}(1\,..\,2m),$$

где m — число ребер. Осталось применить лемму к $X = E$, $\Gamma =$ множество всех минимальных совершенных паросочетания для старых весов.