Лекция 7

Рисование планарного графа.

(Конспект: А. Кожевников)

Замечание 7.1. Этот конспект взят из лекций осени 2001 года.

7.1 Рисование планарного графа

Мы будем рассматривать двусвязный граф, то есть такой, в котором не существует одной вершины, удаление которой ведет к появлению двух компонент связности.

(Заметим, что если граф не таков, то его можно разбить на компоненты, нарисовать их по отдельности и соединить рисунки; чтобы отправить точку соединения на границу области, занимаемой графом, рисуем граф на сфере, после чего раскрываем сферу с дыркой рядом с вершиной.)

Определение 7.1. Окрестность компоненты S графа G – это $\Gamma(S) = \{v \in V_G | \exists e \in E : e = \{v, s\}, s \in S\}$.

Алгоритм 7.1.

1. Взять какой-то цикл и нарисовать его.

2. Если существует компонента, согласованная лишь с одной клеткой, то взять путь в компоненте и вставить путь в эту клетку (удалив путь из компоненты и разбив компоненту на несколько, если она развалилась).

3. Если все компоненты согласованы с несколькими клетками, то взять любую компоненту и вставить путь в клетку (удалив путь...).

□

Задача 7.1. Придумать незначительное изменение алгоритма, работающее $O(n^2)$ для любого графа, а не только для планарного.

Корректность алгоритма утверждается в следующей лемме.

Лемма 7.1. *Пусть в какой-то момент что-то уже нарисовано и алгоритм находится в шаге 3. Компонента C согласована с клетками K_1 и K_2. Если C можно вложить в K_1 (и успешно дорисовать граф до конца), то ее можно вложить и в K_2 (и успешно дорисовать).*

Доказательство. Поменяем все компоненты, согласованные с K_1 и K_2, местами. Перебором случаев проверим, что конфликтов возникнуть не должно (разобьем границу K_1 и K_2 на участки, принадлежащие только K_1, только K_2, либо им вместе; разберем случаи, когда конфликтующий путь начинается на одном из типов участков, а заканчивается на другом или том же самом). □

Замечание 7.2. Существует алгоритм, позволяющий нарисовать планарный граф за линейное время отрезками прямых.